به نام خدا

کدینگ کانال channel coding

دسته بندی کلی کدهای کانال

کدهای کانال را می‌توانیم به دو دسته کلی کدهای تشخیص خطا و کدهای تصحیح خطا دسته بندی کنیم.

* کدهای تشخیص خطا

در این دسته از کدهای کانال، وقتی گیرنده رخ داد خطا را تشخیص می‌دهد، برای تصحیح خطا عملیاتی انجام نمی‌دهد. در این کدها معمولاً از طریق کانال فیدبک، درخواست ارسال مجدد داده‌ها می‌شود. یکی از مثال‌های متداول این دسته از کدها، کدهای ARQ (Automatic ReQuest to send) هستند.

این کدها معمولاً در لایه فیزیکی استفاده می‌شوند

کدهای تصحیح خطا Forward Error Correcting Codes (FEC)

Error Correcting Codes (ECC)

در کدهای تصحیح خطا، پس از اینکه رخ داد خطا در کانال تشخیص داده می‌شود، وارد مرحله‌ی تصحیح خطا می‌شوند. در این مرحله با یک الگوریتم خاص دیکد می‌کنیم مانند نزدیک‌ترین شباهت یا بیشترین احتمال پسین (پس از مشاهده)

Maximum Aposteriori probability (MAP)

Maximum likelihood (ML)

تلاش می‌کند که کلمه کد را بازیابی کند.

البته این عملیات ممکن است با خطا همراه باشد، که به آن خطای دیکدینگ می‌گوییم.

این خطا در دیکدر قابل بررسی و آنالیز است و می‌تواند به میزان زیادی کم باشد.

در این درس تمرکز ما بر روی کدهای تصحیح خطا است.

کدهای FEC را نیز می‌توانیم به دو دسته کلی کدهای بلاکی و کدهای کانولوشنال دسته‌بندی کنیم.

کدهای بلوکی — Block Codes

در کدهای بلوکی، اطلاعات ارسالی به صورت بلوک هایی از بیت های ورودی درمی آیند و در هر بلوک پیام، n بیت که براساس الگوریتم کد یک تعیین دارد می شود. اگر طول بلوک پیام را k در نظر بگیریم، در عملیات کدینگ $n-k$ بیت اضافی redundant به بلوک پیام افزوده می شود و بلوک کد با طول n ساخته می شود.

$n > k$

$\underline{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$

$\underline{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$

بلوک پیام

Message word

طول بلوک پیام $= k$

بلوک رمز

Code word

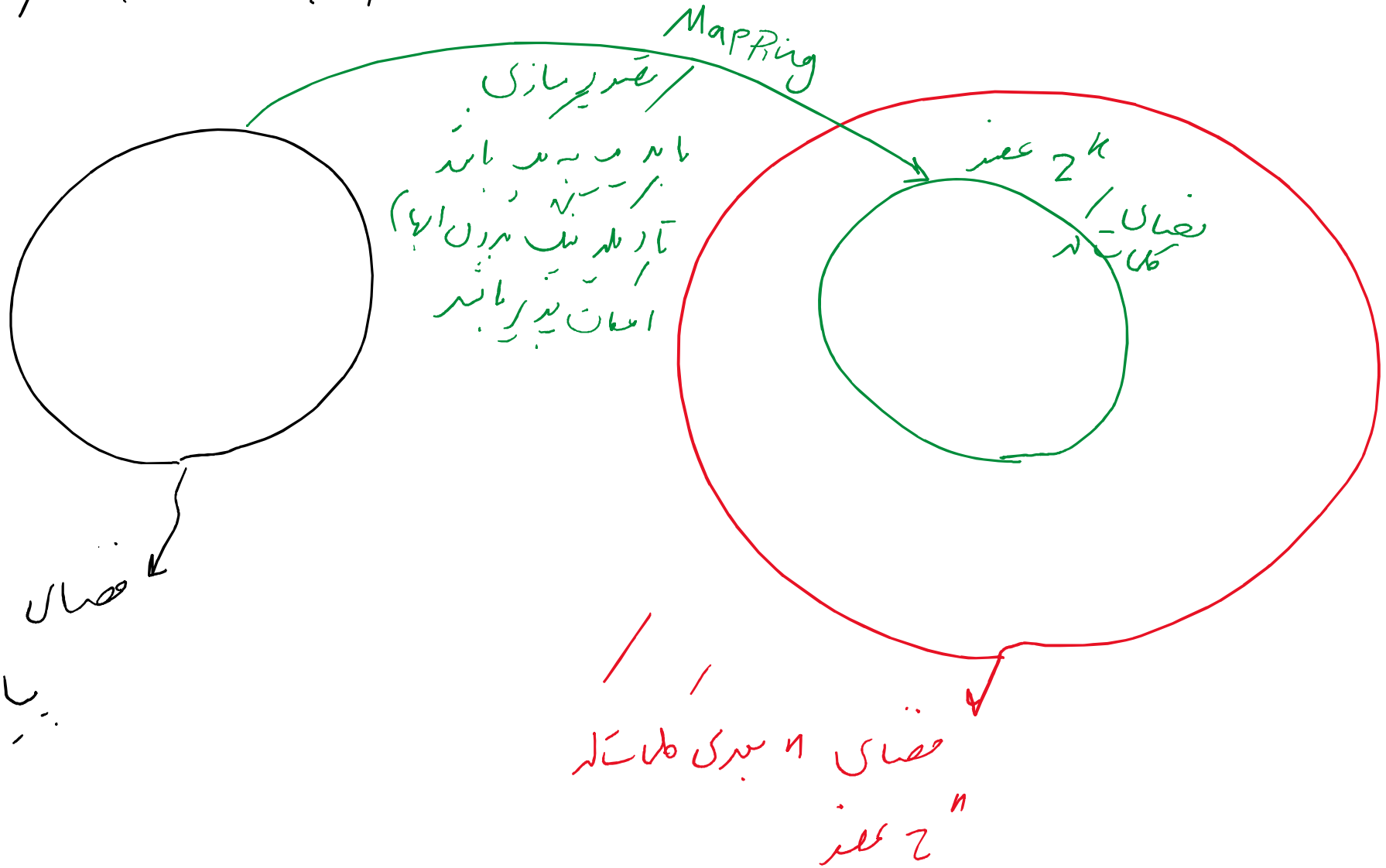
طول بلوک رمز $= n$

نرخ رمز $\equiv R = \frac{k}{n} \leq 1$

در حالت باینری، با در نظر گرفتن طول k برای بردار پیام، تعداد کل حالت‌های ممکن برای پیام‌ها برابر است با 2^k (در حالت M-ary : M^k)

برای هر کلمه پیام، یک کلمه کد باید داشته باشیم. بنابراین تعداد کلمات کد برابر 2^k خواهد بود.

$C(n,k) = (c_{i,1}, \ldots, c_{i,k-1})$



اگر رمز کردن، معادل انتخاب مناسب 2^k کلمه کد از بین 2^n حالت ممکن است.

* نشان داده می‌شود که در یک کد باینری $C(n,k)$، کلمات کد یک زیرفضای k بعدی روی فضای n بعدی تشکیل می‌دهند.

Convolutional Codes

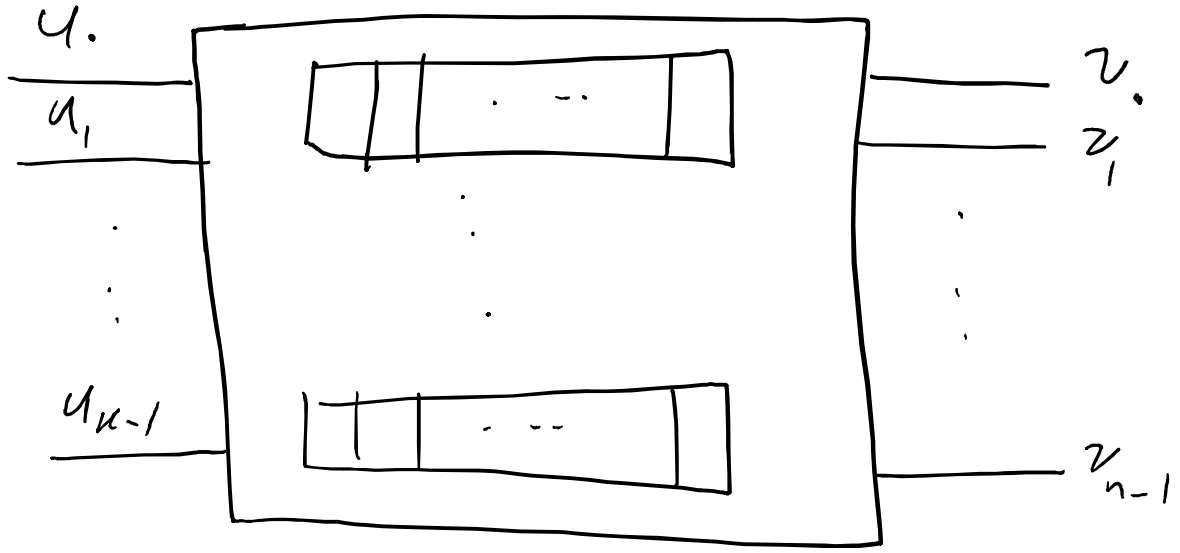
کدهای کانولوشن

در کدهای کانولوشن، برای تولید کد کانال از عناصر حافظه نیز استفاده می‌شود.

$C(n, K, m)$

m = طول بزرگترین عنصر حافظه (شیفت رجیستر)

عمق کد (code depth)



اتصالات عناصر حافظه (شیفت رجیستر) به بیت‌های خروجی را نشان می‌دهند. اتصالات را با چند جمله‌ای‌هایی مشخص می‌کنند.

نرخ کد $R = \frac{K}{n}$

محاسبات کدهای کانولوشنال با کمک دیاگرام هایی زمانی که به آن دیاگرام ترلیس گفته می شود، انجام می شود. یکی از معروف ترین الگوریتم دیکدینگ کدهای کانولوشنال، الگوریتم ویتربی است.

Trellis Diagram

Viterbi Algorithm

در این درس پس از ارائه مثال هایی مختصر مفید که از نظر شهودی، درک بهتری از یک کد پیچشی کانولوشنال به دست می دهند، ری تراشیم بودن و اراشدن به مباحث ریاضیاتی، دیدِ مناسبی در مورد کدگذاری کانولوشنال به دست بیاوریم.

برای شروع بحث، ابتدا تعاریف و مفاهیمی را مطرح می‌کنیم که در سرتاسر بحث‌های کانال‌های مخابراتی مورد استفاده هستند و درک آن‌ها به درک مفهوم کدینگ کمک می‌کند.

* انواع خطاها در کانال

۱- خطای تصادفی

این نوع خطا زمانی رخ می‌دهد که وضعیت کانال به صورت تصادفی در حالت نامناسبی قرار می‌گیرد و اطلاعات ارسالی به صورت تصادفی دچار خرابی می‌شود. معمولاً کدهای کانال نامناسب تصحیح این نوع خطا را دارند.

۲- خطای خوشه‌ای (Burst)

این خطا زمانی رخ می‌دهد که کانال برای مدت کوتاهی در وضعیت نامناسبی قرار گیرد و باعث می‌شود که اطلاعات ارسالی در بیت‌های کوتاه دچار خطا شود. الگوی این نوع خطا به صورت زیر قابل نمایش است.

طول برابر l (تعداد عناصر $= l$)

$$\underline{e} = (0,0,\dots,0,1,X,X,\dots,X,1,0,\dots,0)$$

الگوی خطای خوشه‌ای - طول l

$X \in (0,1)$ ، $\frac{P_r\{X=1\} >> P_r\{X=0\}}{P_r\{X\neq 0\} >> P_r\{X=0\}}$ حالت کلی

* در حالت باینری $e_i = 1$ نشان دهنده‌ی این است که در مکان iام از بردار ارسالی خطا رخ داده است. (فقط در حالت ۰ و ۱ داریم)

* در حالت غیر باینری $e_i \neq 0$ نشان دهنده‌ی این است که در مکان iام از بردار ارسالی خطایی رخ داده است. مقدار این خطاها نیز باید توسط دیکودر مشخص شود

در این درس تمرکز ما بر روی حالت باینری است.

* خطای برستی توان در ابتدا را اندازه‌ی آن گویند

$\underline{e} = (1, X_1, \dots, X_1, 0, 0, \dots, 0, 1, X_1, \dots, X_1)$

طول n

۳- خطای رندم (اتفاقی) Random

در این نوع خطا، بیت‌های خطا در الگوی خطا به صورت تصادفی توزیع شده‌اند

$$e = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$$

(توزیع خطا به صورت iid است)

* کدهای فاقد قابلیت تصحیح این نوع خطا را دارند.
* برخی کدهای فاقد (مانند کدهای RS (Reed-Solomon)) قابلیت تصحیح خطاهای خوشه‌ای را دارند.

پارامتر دیگری که در مورد کدهای کانال قابل توجه است، کمترین فاصله همینگ کلمات کد است.
که آن را با d_{min} نمایش می‌دهیم. خواهیم دید که d_{min} معیاری از قابلیت تشخیص
و تصحیح خطای کد را به دست می‌دهد.
برای بیان مفهوم کمترین فاصله همینگ کلمات کد، ابتدا لازم است مفهوم فاصله همینگ را
بیان کنیم.

فاصله همینگ Hamming Distance

برای دو بردار هم طول $\underline{x}$ و $\underline{y}$

$$\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$$

$$\underline{y} = (y_0, \ldots, y_{n-1})$$

فاصله همینگ عبارت است از تعداد مکان هایی از این دو بردار که عناصر متناظری دارند.

با بیان ریاضی:

$$d_H(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, y_i)$$

$$d(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & x_i \neq y_i \\ 0 & x_i = y_i \end{cases}$$

که در آن

مثال: برای بردارهای زیر فاصله همینگ را به دست بیاورید.

$$\underline{x}_1 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

$$\underline{y}_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$$

$$\longrightarrow d(\underline{x}_1, \underline{y}_1) = 4$$

$$\underline{x}_2 = (1, 3, 0, 5, 2, 0, 0)$$

$$\underline{y}_2 = (0, 1, 0, 3, 2, 0, 1)$$

$$\rightarrow d(\underline{x}_2, \underline{y}_2) = 4$$

تعریف: فاصله‌ی بردار $\underline{x}$ و $\underline{y}$ به تابع مترب (Metric Function) / تابع فاصله (Distance Function) است.

یادآوری: تابعی را متریک می‌گذاریم که خصوصیات زیر برای آن برقرار باشد،

1) $d(x,y) \geq 0$ — غیرمنفی بودن

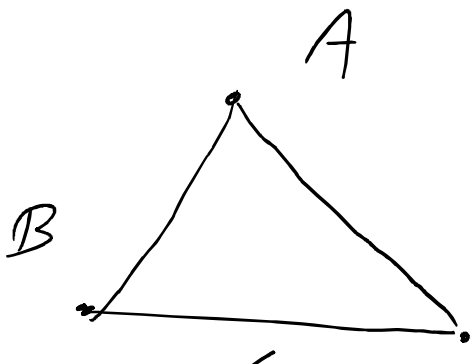
2) $d(x,y)=0 \iff x=y$ — انعکاسی بودن (reflexive)

3) $\forall x,y;\ d(x,y)=d(y,x)$ — خاصیت تقارن (symmetry)

4) $\forall x,y,z;\ d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$ — نامساوی مثلثی (triangle inequality)

A

B



تساوی زمانی برقرار است که تمام در یک راستا باشند.